4章 リスクとプレミアム

4.1 リスクとは

教科書では「リスクは不確実性に起因する損失の可能性」と定義する。単なる不確実性ではなくて、自分の利害に関わる不確実性である。

4.1.1 収益率と対数収益率

今日の収益率を定義する2つの方法がある。(1)今日の価格を基準にする、(2)前日の価格を基準にするの2つである。教科書は(1)の方法。

今日の価格が基準：
$$R_t = \frac{S_{t+1} - S_t}{S_t} \cdots (1)$$
$$LR_t = \mathrm{Log}\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = \mathrm{Log}(S_{t+1}) - \mathrm{Log}(S_t) \cdots (2)$$

前日の価格が基準：
$$R_t = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} \cdots (3)$$
$$LR_t = \mathrm{Log}\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) = \mathrm{Log}(S_t) - \mathrm{Log}(S_{t-1}) \cdots (4)$$

自然対数

教科書p.173~p.176

$e = \lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n$ をネイピア数と呼ぶ。eと底とする対数を自然対数と呼ぶ。

Log(x) = a ならば、$x=e^a$ を意味している。

$x=e^a$ならば、$x^2=(e^a)^2 = e^{2a}$であるから、$\mathrm{Log}(x^2)=2a$。つまり$\mathrm{Log}(x^2)=2\mathrm{Log}(x)$。

Log(1)=0

x→ 0 につれて、Log(x)→-∞。x=0の場合、Log(x)は定義されない。

•価格の変化がなければ$\frac{S_t}{S_{t-1}}$=1となる。Log(1)=0 であるから、収益率は対数値でもゼロ。

•ネイピア数は連続複利を適用する際に現れた。利子率rで連続複利を適用すると、1年後の元利合計は、元本のe^r倍となる。言い換えると、実効年率利回りはe^r-1。

対数収益率を求める理由

株価も為替相場も刻々とランダムに変化する。価格を確率変数として考える。そして何らかの確率分布に従うと仮定する。その際通常、正規分布が適用される。(理由は？)価格の変化の特徴を表すためには、分布関数の係数の値を調整する。

正規分布はマイナス無限大からプラス無限大の値をとる分布関数である。価格がゼロに下落した場合には、収益率(R_t)はマイナス1である。それよりも小さい負の値はとらない。価格変化が小さい場合には問題がないが、倒産した場合の株価のように、価格がゼロに下落する場合には矛盾がはっきりしてしまう。

一方、対数値ならば、価格がゼロに下落した場合には、収益率はマイナス無限大である。価格の対数値が正規分布に従うと仮定すると、矛盾が生じない。(厳密には価格ゼロは定義されないが。)そのため、価格変化は対数正規分布に従う確率変数と仮定される。

2つの収益率は近似値となるか

収益率をRとする。$S_t = (1\text{+R})\ S_{t-1}$ であるとき、対数収益率Log($\frac{S_t}{S_{t-1}}$) の値はどれだけRに近いか調べてみよう。つまり、R と Log(1 + R) の差を調べてみるのである。ただし、教科書p.60では、x=1+Rと置き換えられた形になっている。R=x-1であり、Log(x) ≈ x-1と表示されている。

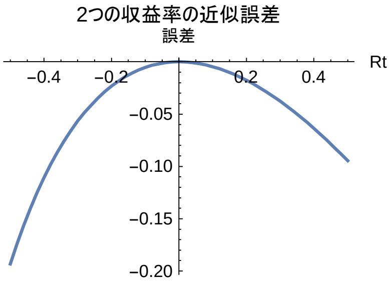
ここでは、Rの値を-0.5 から+0.5まで0.02刻みで変化させてみよう。(-0.5, -0.48,..., +0.48, +0.5)と全部で51個の値である。変数名R_t とする。記号Rは変数として使えない。

```
Clear[Lx, graph1]; m = 51;
Rt = Table[-0.5 - 0.02 + 0.02 k, {k, 1, 51}];
x = Table[1 + Rt[[k]], {k, 1, 51}];
```

```
Clear[diff]
diff = Table[Log[x[[i]]] - (x[[i]] - 1), {i, 1, 51}];
```

グラフで見てみよう。xではなくて、Rtの値に戻してグラフを描く。

```
Clear[A];
A = Table[{Rt[[i]], diff[[i]]}, {i, 1, 51}];
ListLinePlot[A,
             PlotLabel → "2つの収益率の近似誤差",
             AxesLabel → {"Rt", "誤差"},
             ImageSize → 200]
```



日次の変化率では、ほとんどの場合、数字が小さくなるので、2つの収益率は実質的に同じ値である。

収益率の対称性

価格が10%上昇し次に10%下落したとき、元の値に戻っているであろうか。

•Rtの場合：　10%上昇、下落の意味はRtの定義式(3)に従うと次の通り。 $\frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}} = \pm 0.1$。

つまり$S_t = 1.1\ S_{t-1}$　かつ　$S_{t+1} = 0.9\ S_t$ となる。その結果、$S_{t+1} = 0.99\ S_{t-1}$となる。　$S_{t+1} < S_{t-1}$であるから元に戻っていない。

•LR_t の場合：　価格の対数値が10%上昇し、次に10%下落した場合は次のように考える。
10%上昇、下落の意味は次の通り。
$\text{LR}_t = \text{Log}(S_t) - \text{Log}(S_{t-1}) = +0.1$　かつ　$LR_{t+1} = \text{Log}(S_{t+1}) - \text{Log}(S_t) = -0.1$。
ならば　$\text{Log}(S_{t+1}) = \text{Log}(S_{t-1})$ となり、元に戻っている。
•LR_tには対称性があるが、Rtにはない。

4.1.2　リスクとリターン

以下、株価を例にする。株価は日々、あるいは時々刻々と変動する。収益率も変動している。そこでここでは収益率を確率変数として扱う。確率変数には期待値、分散、標準偏差が定義される。期待値は平均的な値、分散と標準偏差は、期待値の周りにどれだけバラツクかという指標である。標準偏差は分散の平方根。

例として、Rtの意味の収益率を確率変数としてXで表す。期待値や分散、標準偏差は次のような記号で表す。期待値は E[X]、μ 、分散はVar[X]、σ^2 標準偏差はs.d. 、σ。

確率変数Xがあり、とりうる値と確率は表のようなものとする。

値	x_1	x_2	⋯	x_n
確率	p_1	p_2	⋯	p_n

(サイコロなら、目の値が確率変数で、とりうる6つの値は1から6まで、確率は$\frac{1}{6}$ である。)

$$E[X] = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \quad \cdots \quad (5)$$

$$Var[X] = \sum_{k=1}^{n} p_k (x_k - \mu)^2 \quad \cdots \quad (6) \quad \text{ただし、} \mu = E[x]$$

$$\sigma = \sqrt{Var[X]} \quad \cdots \quad (7)$$

リターンとボラティリティー

教科書では、収益率の期待値をリターン、標準偏差をボラティリティーと呼んでいる。記号はμとσを用いる。

ボラティリティーの推定

教科書p.63の(4.3)式は、観察されたT個の値から、期待値と分散を推定する式である。分散の式ではT－1で割っている。

教科書例4.2は省略。

4.2 代表的なリスク指標

4.2.1 ボラティリティー

株のポートフォリオを保有しているとしよう。株価が上昇するのは良いが、下落は投資家の資産状況に様々な問題を起こすかもしれない。最悪倒産。ボラティリティーが高ければ、株価は大きく上がる可能性もある代わりに、大きく下がる可能性もある。そこで、株価のボラティリティーはリスクを表す指標として用いられる。

教科書(4.5)式の説明省略。

4.2.2 VaR (Value at Risk)

保有するポートフォリオの価値をVとする。これから1週間あるいは1ヶ月間の価値を変化をΔVで表す。ΔVは確率変数とする。期間内の損失が、確率αを超えないような額xをVaRと呼ぶ。
$\mathrm{Prob}(\Delta V \leq -x) = \alpha$ を満たすxの値である。
解釈：αの値を5%として見つけたxの値が1000万円なら、95%の確率で損失は1000万円以内であると安心できる。

4.3 リスクプレミアム

将来のキャッシュフローが不確実な場合には、現在価値を求める際に用いる利子率は高くなるであろう。安全な利子率との差をリスクプレミアムと呼ぶ。借入の場合の利子率についても同じ。返済の確実性が低くなるにつれて、借入の利子率が高くなる。

4.3.1 確実性等価は省略。4.3.2 シャープレシオも省略。p.70のボラティリティーの数字には誤りあり。

Extra: 乱数の発生方法

1. 正規分布に従う乱数

正規乱数を作成

```
Clear[Z]
Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1]]
```

−1.36532

正規乱数をm個作成

```
Clear[Z]; m = 5;
Z = RandomReal[NormalDistribution[0, 1], m]
```

{0.927121, 0.756758, 0.424043, −0.485892, 0.542714}

2. 任意の確率分布に従う乱数

- RandomReal[ ]　0~1の範囲の値を発生させる。
- RandomInteger[{min,max}]　minからmaxまでの整数を同じ確率で選ぶ。
- RandomChoice[{q,1-q}→{-1,1}]　確率qで-1、確率1-q で1の値をとる乱数を発生させる。

```
RandomInteger[{1, 6}] (*サイコロ *)
```

1

Homework No.5

問1.

サイコロの目の期待値と分散を求めなさい。ヒント：定義に従って計算する。

問2.

教科書、p .61 問題4 .1。Rtの計算方法は（1）と（2）に従いなさい。

問3.

ATMにやってきた客は1万円入金するか1万円降ろすかのいずれかとする。
X_1 =1 または-1。確率はそれぞれq と1-q。

X_1	⋰	出金	入金
	とりうる値	−1	+1
	確率	q	1 − q

(1) q=0.4 とする。ある支店のATMの現金の動きは確率変数である。確率変数Yであるとする。
客が1人の場合のYの期待値と分散を求めなさい。ヒント：定義に従って計算する。

(2) 客が2人の場合を考える。各人の入出金はそれぞれ確率変数X_1 と X_2 で表す。確率分布は2人とも同じ。表を完成させて、Yの期待値と分散を求めなさい。また折れ線グラフでYの値と確率の関係をグラフで表しなさい。Y=X_1 +

X_2
ヒント: ListLinePlot[ ]

Y	とりうる値	−2	0	2
□	確率	□	□	□

(3) 客が5人の場合を考える。Y=X_1+... + X_5 。シミュレーションを行うことにする。結果をヒストグラムで表示しなさい。

確率を指定して乱数を発生させる （ 確率の割り当てを{1-q,q}へ訂正済み　11月14日）

```
Clear[X, Y]; q = 0.4; m = 5;
X = RandomChoice[{1 - q, q} → {-1, 1}, m]
(*指定した確率で、m人分だけ2つの値をランダムに選ぶ*)
Y = Sum[X[[i]], {i, 1, m}];
Print["1回の試行の結果: Y = ", Y]
```

{1, 1, 1, 1, -1}

1回の試行の結果: Y = 3

一組5人分を繰り返す

m人分を1組とする。何組分も繰り返す。以下では変数名simで繰り返す回数を指定している。

```
Clear[X, Y, sim]; sim = 10;
X = Table[RandomChoice[{q, 1 - q} → {-1, 1}, m], {i, 1, sim}]
Y = Table[Sum[X[[j, i]], {i, 1, m}], {j, 1, sim}]
```

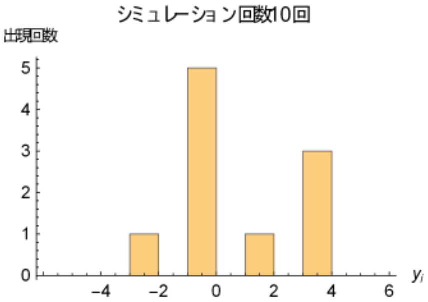
{{1, -1, 1, -1, -1}, {-1, 1, -1, -1, -1}, {1, 1, -1, 1, -1},
{1, 1, 1, 1, -1}, {-1, -1, 1, -1, 1}, {1, -1, 1, 1, 1}, {-1, -1, -1, 1, 1},
{1, -1, -1, 1, -1}, {1, 1, 1, 1, -1}, {-1, 1, 1, -1, -1}}

{-1, -3, 1, 3, -1, 3, -1, -1, 3, -1}

ヒストグラムで表示する

{-m-1,m+1,1} は最小-m-1 最大m+1の範囲を刻み幅１で表示する。ここでYのとりうる値は-mから+mまでであるが、一つ分余裕を持たせておかないと、グラフがわかりにくい。(横軸Y=0 なら、Y＝0の度数の棒グラフはY=0より右に表示される。

```
Histogram[Y, {-m - 1, m + 1, 1},
          PlotLabel → "シミュレーション回数10回",
          AxesLabel → {"yi", "出現回数"},
          ImageSize → 220]
```



(4) 引き続き、客が5人の場合を考える。Yの10組の結果からYの期待値と標準偏差を推定しなさい。教科書p .63。

(5) 客が50人の場合を考える。Y=X_1+... + X_{50} 。q=0.5とする。 シミュレーションを行って、Yの値の頻度を表すヒストグラムを作成しなさい。

(6) 50人の場合の、Yの期待値と標準偏差を推定しなさい。

問4.

（1）期待値0、分散1の正規分布に従う乱数を100個発生させなさい。
つまり、x_1, x_2, ... x_{100} を作成する。

（2）Y = 2X + 0.5 とする。Xの値からYの値を100個求めなさい

（3）Yは確率変数の関数であり、Yも確率変数となる。
作成した100個のサンプルからYの期待値と分散を推定しなさい。教科書p .63